



TITLE:

乱流の確率汎函数方程式と一点,二
点分布函数方程式との関係につい
て (統計流体力学における近似解法
の研究会報告集)

AUTHOR(S):

永倉, 俊充

CITATION:

永倉, 俊充. 乱流の確率汎函数方程式と一点,二点分布函数方程式との関係について (統計流体力学における近似解法の研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 80: 34-44

ISSUE DATE:

1970-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/108014>

RIGHT:

乱流の確率汎函数方程式と一点、二 点分布函数方程式との関係について

都立大 理学部 永 倉 俊 充

§ 1. 乱流の確率汎函数方程式

流体等の deterministic mechanical system の諸量を一括して一つの vector $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ で示し

$$u_\rho \equiv \rho, u_x \equiv v_x, u_y \equiv v_y, u_z \equiv v_z, u_E \equiv e, \dots\dots.$$

とする。この変化が

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{L}^*(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_0) \quad (1)$$

で与えられるとき、この系の ensemble を考え、 \mathbf{u} が $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + d\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ の間にある probability を

$$\int P(\mathbf{u}, t) d\Omega, \quad \int P(\mathbf{u}, t) d\Omega = 1 \quad (2)$$

とする。 $d\Omega$ は $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ の functional space の volume element であり $P(\mathbf{u}, t)$ が確率汎函数である。

$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ の上記 (1) に従う deterministic change に対し probability は conserve されるべき故、 $t = t_0$ の量に脚符 0 をつけて示すと

$$P d\Omega = \text{const} = P_0 d\Omega_0, \quad \left(\frac{dP d\Omega}{dt} \right)_{\mathbf{r}} = 0, \quad (3)$$

が成立しなければならない。但し $(d/dt)_{\mathbf{r}}$ は \mathbf{u} を \mathbf{r}, t の函数と見て、 \mathbf{r} を固定しての微分である。

\mathbf{r} の所の volume element $d\mathbf{r}$ の部分の \mathbf{u} が $d\mathbf{u}$ だけ変化したときの P の変化を $(\delta P / \delta \mathbf{u})_{\mathbf{r}} d\mathbf{r}$ とし

$$\mathbf{A} \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{u}} = \sum_{\lambda} \int A_{\lambda} \left(\frac{\delta P}{\delta u_{\lambda}} \right) d\mathbf{r} \quad (4)$$

とおくと次式が成立する。

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{\mathbf{r}} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{L}^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{u}} \quad (5)$$

また $d\Omega$ の変化に対しては compressible flow の連続関係と同様

$$\frac{dd\Omega}{dt} = \frac{\delta \dot{\mathbf{u}}}{\delta \mathbf{u}} d\Omega = \frac{\delta \mathbf{L}^*}{\delta \mathbf{u}} d\Omega \quad (6)$$

が成立する。但し

$$-\frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \mathbf{u}} \equiv \sum_{\lambda} \int \left(\frac{\delta F_{\lambda}}{\delta \mathbf{u}_{\lambda}} \right)_{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (7)$$

とおいっている。

(5), (6) 式を (3) の第2式に入れると Liouville の定理に相当する次の確率汎函数方程式が得られる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\delta \mathbf{L}^* P}{\delta \mathbf{u}} = 0 \quad (8)$$

任意の量 $G(\mathbf{u})$ の \mathbf{r}, t に於ける ensemble mean $\overline{G}(\mathbf{r}, t)$ は次のように考えられる。

$$\overline{G}(\mathbf{r}, t) \equiv \int G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}} P(\mathbf{u}, t) d\Omega = \int G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}} P_0 d\Omega_0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial t} = \int G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}} \frac{\partial P}{\partial t} d\Omega = - \int G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}} \frac{\delta \mathbf{L}^* P}{\delta \mathbf{u}} d\Omega = \int \left(\mathbf{L}^* \frac{\delta G}{\delta \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{r}} P d\Omega$$

$$\therefore \int \left\{ G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}} \frac{\partial P}{\partial t} - \left(\mathbf{L}^* \frac{\delta G}{\delta \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{r}} P \right\} d\Omega = 0 \quad (10)$$

$G(\mathbf{u})$ として \mathbf{u} をとると, (1) 式の ensemble mean に相当する moment eq. が得られ次のようになる。

$$\int \left(\mathbf{u}_{\mathbf{r}} \frac{\partial P}{\partial t} - \mathbf{L}_{\mathbf{r}}^* P \right) d\Omega = 0 \quad (11)$$

但し () _{\mathbf{r}} 等は \mathbf{r} に於ける値を示す。

§ 2. Hopf の汎函数方程式との関係

P を \mathbf{u} の functional space で Fourier transform したものを $\Phi(\mathbf{y}, t)$ とおく。

即ち

$$(\mathbf{y} \mathbf{u}) \equiv \sum_{\lambda} \int \gamma_{\lambda}(\mathbf{r}) u_{\lambda}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (12)$$

とおき次のようにとる。

$$\Phi(\mathbf{y}, t) \equiv \int e^{i(\mathbf{y} \mathbf{u})} P d\Omega. \quad (13)$$

(9) 式の $G(\mathbf{u})$ として $e^{i(\mathbf{y} \mathbf{u})}$ を入れた形になっている故 (10) 式から次式が成立する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int \mathbf{L}^* \frac{\delta G}{\delta \mathbf{u}} P d\Omega = \int i(\mathbf{y} \mathbf{L}^*) e^{i(\mathbf{y} \mathbf{u})} P d\Omega. \quad (14)$$

\mathbf{r}_j の所で $\Delta \mathbf{r}$ なる volume element の部分の \mathbf{y} が $d\mathbf{y}$ 変ったときの Φ の変化に対し次式が成立する。

$$\left(\frac{\partial \Phi}{i \delta \mathbf{y}} \right)_{\mathbf{r}_j} = \int \mathbf{u}(\mathbf{r}_j) e^{i(\mathbf{y} \mathbf{u})} P d\Omega \cdot \Delta \mathbf{r}. \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}(j)} \left(\frac{\partial \Phi}{i \delta \mathbf{y}} \right)_{\mathbf{r}_j} = \int \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}_j)}{\partial x_{\lambda}(j)} e^{i(\mathbf{y} \mathbf{u})} P d\Omega \cdot \Delta \mathbf{r}. \quad (15')$$

\mathbf{L}^* は \mathbf{u} , $\partial u_{\lambda} / \partial x_{\nu}$, $\partial^2 u_{\lambda} / \partial x_{\mu} \partial x_{\nu}$, \mathbf{r} の函数である故 $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}^*(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ と記すと (14)

は次のようにおける。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int i \mathbf{y} \mathbf{L}^* \left(\frac{\delta}{i \delta \mathbf{y}}, \mathbf{r} \right) \Phi d\mathbf{r}, \quad (16)$$

これは Hopf⁽¹⁾ の汎函数方程式に外ならない。

§ 3. One point distribution function $f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t)$

$P(\mathbf{u}, t)$ は initial の値が決まればそれ以後の値は (1) 式に従う deterministic を関係で決り何等統計論的な要素ははいらない。場所を一点或は何個所かに fix して着目し、そこに於ける \mathbf{u} の値が例えば \mathbf{w} である確率を考えることによって始めて統計的な意味がある。 P はそのときの

ensemble の分布を与えていることになる。

\mathbf{r} , t に於ける \mathbf{u} の値が \mathbf{w} である probability を与える \mathbf{u} の distribution function を次のようにとる

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) \equiv \int \delta(\mathbf{w} - \mathbf{u}(\mathbf{r})) P d\Omega \quad (17)$$

但し $\delta(\mathbf{w} - \mathbf{u}) \equiv \prod_{\lambda} \delta(w_{\lambda} - u_{\lambda})$ とおいている。(10) 式で $G(\mathbf{u})$ として上記 δ -function を入れると f の満足すべき方程式として次式が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \int \left\{ \mathbf{L}^* \frac{\partial \delta(\mathbf{w} - \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right\}_{\mathbf{r}} P d\Omega = 0 \quad (18)$$

但し $\left\{ \right\}_{\mathbf{r}}$ は \mathbf{r} に於ける値をとることを示す。

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho \mathbf{L}^* \equiv -\rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{L} \quad , \quad \rho L_{\rho} = -\rho^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \quad , \quad (19)$$

とおけるときのについて f の式を具体化すると次のようになる。

$$\frac{\partial w_{\rho} f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (w_{\rho} \mathbf{v}_{\rho} f) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \int \left\{ \mathbf{L} \delta(\mathbf{w} - \mathbf{u}) \right\}_{\mathbf{r}} P d\Omega = 0 \quad . \quad (20)$$

但し \mathbf{w}_{ρ} は \mathbf{v} の指定値 \mathbf{w} を示している。また

$$\int \left\{ G(\mathbf{u}) \delta(\mathbf{w} - \mathbf{u}) \right\}_{\mathbf{r}} P d\Omega = G(\mathbf{w}) f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) \quad (21)$$

の成立することを用いた。更に $G(\mathbf{w})$ の mean をとると

$$\begin{aligned} \bar{G}(\mathbf{r}, t) &\equiv \int G(\mathbf{w}) f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w} = \int \int G(\mathbf{w}) \delta(\mathbf{w} - \mathbf{u})_{\mathbf{r}} d\mathbf{w} P d\Omega \\ &= \int G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}} P d\Omega \quad . \end{aligned} \quad (22)$$

となり (9) に求めた ensemble mean と一致する。また (20) 式を \mathbf{w} について積分すると

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (23)$$

\mathbf{w}_{λ} を掛けて積分すると

$$\frac{\partial \overline{\rho u_{\lambda}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\overline{\rho \mathbf{v} v_{\lambda}}) - \bar{F}_{\lambda} = 0 \quad , \quad \bar{F}_{\lambda} \equiv \int (L_{\lambda})_{\mathbf{r}} P d\Omega \quad (24)$$

が成立し (10) で $G(\mathbf{u}) = \rho \mathbf{u}$ とした moment eq. になる。

§ 4. s-point distribution function $f^{(s)}(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{r}^{(s)}, \mathbf{w}^{(s)})$.

$\mathbf{r}^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, s$) に於ける $\mathbf{u}(\mathbf{r}^{(i)}) = \mathbf{u}^{(i)}$ の値が $\mathbf{w}^{(i)}$ である distribution function を次のようにとる。

$$f^{(s)}(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{r}^{(s)}, \mathbf{w}^{(s)}) \equiv \int \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) \delta(\mathbf{w}^{(2)} - \mathbf{u}^{(2)}) \dots \delta(\mathbf{w}^{(s)} - \mathbf{u}^{(s)}) P d\Omega$$

$$G = \frac{\prod_{j=1}^s \rho^{(j)} \delta(\mathbf{w}^{(j)} - \mathbf{u}^{(j)})}{\prod_{j=1}^s \rho^{(j)} \delta(\mathbf{w}^{(j)} - \mathbf{u}^{(j)})} \text{ とすると (18) 式は} \quad (25)$$

$$\frac{\partial w_{\rho}^{(1)} \dots w_{\rho}^{(s)} f^{(s)}}{\partial t} - \sum_{i=1}^s \int \mathbf{L}^{*(i)} \frac{\partial \prod_{j=1}^s \rho^{(j)} \delta(\mathbf{w}^{(j)} - \mathbf{u}^{(j)})}{\partial \mathbf{u}^{(i)}} P d\Omega = 0$$

となり \mathbf{L}^* が (19) の形するとき $f^{(s)}$ の式は次のようになる。

$$\frac{\partial w_{\rho}^{(1)} \dots w_{\rho}^{(s)} f^{(s)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} (w_{\rho}^{(1)} \dots w_{\rho}^{(s)} f^{(s)}) \quad (26)$$

$$+ \sum_{j=1}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(j)}} \int \mathbf{L}^{(i)} \rho^{(1)} \dots \rho^{(s)} \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) \dots \delta(\mathbf{w}^{(s)} - \mathbf{u}^{(s)}) P d\Omega = 0$$

$f^{(s)}$ は次の関係を満足する

Separation property, $\lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty} f^{(2)}(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)}, t) = f(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}, t) f(\mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)}, t)$

reduction property. (27)

$$\lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0} f^{(2)}(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)}, t)$$

$$= \lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \int \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}(\mathbf{r}_1)) \delta(\mathbf{w}^{(2)} - \mathbf{u}(\mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r})) P d\Omega = f(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{w}_1^{(1)}, t) \delta(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) \quad (28)$$

$$\int \frac{\partial G(\mathbf{u}^{(1)})}{\partial \mathbf{r}^{(1)}} \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) P d\Omega = \lim_{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \mathbf{r}} \int \{G(\mathbf{r}^{(1)} + \Delta \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}^{(1)})\} \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) P d\Omega$$

$$= \lim_{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \rightarrow 0} \int \int G(\mathbf{w}^{(2)}) \{ \delta(\mathbf{w}^{(2)} - \mathbf{u}^{(2)}) - \delta(\mathbf{w}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}) \} d\mathbf{w}^{(2)} \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) P d\Omega$$

$$= \lim_{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \rightarrow 0} \int G(\mathbf{w}^{(2)}) \frac{\partial f^{(2)}(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{w}_1^{(1)}, \mathbf{r}_2^{(2)}, \mathbf{w}_2^{(2)}, t)}{\partial \mathbf{r}^{(2)}} d\mathbf{w}^{(2)} \quad (29)$$

$$\int \frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^{(1)})}{\partial \mathbf{r}^{(1)} \partial \mathbf{r}^{(1)}} \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) P d\Omega = \lim_{\mathbf{r}^{(2)} \rightarrow \mathbf{r}^{(1)}} \int G(\mathbf{w}^{(2)}) \frac{\partial^2 f^{(2)}(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{w}_1^{(1)}, \mathbf{r}_1^{(2)}, \mathbf{w}_1^{(2)})}{\partial \mathbf{r}^{(2)} \partial \mathbf{r}^{(2)}} d\mathbf{w}^{(2)} \quad (30)$$

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \mathbf{r}^{(1)}} \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \mathbf{r}^{(1)}} \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) P d\Omega \quad (31)$$

$$= \lim_{\substack{\mathbf{r}^{(2)} \rightarrow \mathbf{r}^{(1)} \\ \mathbf{r}^{(3)} \rightarrow \mathbf{r}^{(1)}}} \int \mathbf{w}^{(2)} \mathbf{w}^{(3)} \frac{\partial^2 f^{(3)}(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{w}_1^{(1)}, \mathbf{r}_1^{(2)}, \mathbf{w}_1^{(2)}, \mathbf{r}_1^{(3)}, \mathbf{w}^{(3)})}{\partial \mathbf{r}^{(2)} \partial \mathbf{r}^{(3)}} d\mathbf{w}^{(2)} d\mathbf{w}^{(3)}$$

$$\begin{aligned} & \int \int G(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)}) d\mathbf{r}^{(2)} \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) P d\Omega \\ &= \int \int G(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{w}_1^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)}) f^{(2)}(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{w}_1^{(1)}, \mathbf{r}_1^{(2)}, \mathbf{w}_1^{(2)}, t) d\mathbf{r}^{(2)} d\mathbf{w}^{(2)} \end{aligned} \quad (32)$$

§ 5. 流体の場合の f の方程式の具体的な形

a) Incompressible flow⁽²⁾

$\rho = \text{const.}$ 故変数から外す。温度も考えないとする、 \mathbf{u} としてはvel. \mathbf{v} だけをとればよく

$$\mathbf{L} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad (33)$$

となり、 $\rho(\partial \mathbf{v} / \partial t) = -(\rho \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}) \mathbf{v} - (\partial p / \partial \mathbf{r}) + \mu \Delta \mathbf{v}$ から

$$\Delta p = -\sum_{\nu} \rho \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}}{\partial \mathbf{r}} \quad \therefore p = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}}{\partial \mathbf{r}} \right)' d\mathbf{r}'$$

が得られる。従って f の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w} f}{\partial \mathbf{r}} - \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial w_{\lambda}} \int \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} \frac{w_{\mu}^{(2)} w_{\nu}^{(2)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \frac{\partial^2 f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathbf{r}', \mathbf{w}', t)}{\partial x_{\mu}' \partial x_{\nu}'} d\mathbf{r}' d\mathbf{w}^{(2)} \\ & + \mu \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial w_{\lambda}} \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \int w_{\lambda}^{(2)} \sum_{\nu} \frac{\partial^2 f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathbf{r}', \mathbf{w}^{(2)}, t)}{\partial^2 x_{\nu}'} d\mathbf{w}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(1)} f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}^{(1)}} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(2)} f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}^{(2)}} + \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(1)}} \int \left(-\frac{\partial p}{\partial x_{\nu}} + \mu \Delta v_{\nu} \right)^{(1)} \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) \delta(\mathbf{w}^{(2)} - \mathbf{u}^{(2)}) P d\Omega \\ & + \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(2)}} \int \left(-\frac{\partial p}{\partial x_{\nu}} + \mu \Delta v_{\nu} \right)^{(2)} \delta(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) \delta(\mathbf{w}^{(2)} - \mathbf{u}^{(2)}) P d\Omega = 0 \quad (35) \end{aligned}$$

b) Compressible flow

$$\left. \begin{aligned} p &= \rho(\gamma - 1)e, \quad e \equiv C_v T, \quad L_\rho = -\rho^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \\ L_{v,\lambda} &= -\frac{\partial p}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mu \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_\lambda} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \equiv \frac{\partial \mathbf{k}_\lambda}{\partial \mathbf{r}} \\ L_e &= \sum_\lambda \mathbf{k}_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\lambda}{C_v} \frac{\partial e}{\partial \mathbf{r}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ととればよく， f の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_\rho f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (w_\rho \mathbf{w}_v f) - \frac{\partial}{\partial w_\rho} \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \int w_\rho^{(2)} \mathbf{w}_v^{(2)} \frac{\partial f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathbf{r}', \mathbf{w}^{(2)}, t)}{\partial \mathbf{r}'} d\mathbf{w}^{(2)} \\ & + \sum_\nu \frac{\partial}{\partial w_{v,\nu}} \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \int \left\{ -(\gamma - 1) w_\rho^{(2)} w_e^{(2)} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} + \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left(w_{v,\nu}^{(2)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + \mathbf{w}_v^{(2)} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \right) \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} \mu \mathbf{w}_v^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}' \partial x'_\nu} \right\} f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathbf{r}', \mathbf{w}^{(2)}, t) d\mathbf{w}^{(2)} \\ & - \frac{\partial}{\partial w_e} \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \int \frac{\lambda}{C_v} w_e^{(2)} \frac{\partial^2 f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathbf{r}', \mathbf{w}^{(2)}, t)}{\partial \mathbf{r}'^2} d\mathbf{w}^{(2)} \\ & + \frac{\partial}{\partial w_e} \lim_{\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}} \int \int \mu \sum_\nu w_{v,\nu}^{(2)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \left(w_{v,\nu}^{(3)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_3} + \mathbf{w}_v^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_{\nu 3}} - \frac{2}{3} \mathbf{w}_v^{(3)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_3} \right) f^{(3)} d\mathbf{w}^{(2)} d\mathbf{w}^{(3)} \\ & + \sum_\nu \frac{\partial}{\partial w_{v,\nu}} \lim_{\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}} \int \int \left(\frac{\partial \mu^{(2)}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}^{(2)}} \mathbf{w}^{(2)} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} (\text{上と同}) f^{(3)} d\mathbf{w}^{(2)} d\mathbf{w}^{(3)} \\ & - \frac{\partial}{\partial w_e} \lim_{\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}} \int \int \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(2)}} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right) \mathbf{w}^{(2)} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} e^{(3)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_3} f^{(3)} d\mathbf{w}^{(2)} d\mathbf{w}^{(3)} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$f^{(3)} \equiv f^{(3)}(\mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathbf{r}_2, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{r}_3, \mathbf{w}^{(3)}, t)$$

非常に複雑となる。気体の場合更に別のモーメントの量をとると精度をあげることになるが，これはその極限を考えると，気体の粒子の速度分布函数を \mathbf{u} としてとるとよいことを示す。

§ 6. 粒子系の velocity distribution function を mechanical system と考える方法

上記のように \mathbf{u} 即ち u_1, u_2, \dots の数を充分にとって精度を高くする極限として、気体論で考える速度分布関数を \mathbf{u} としてとることが考えられる。一般の混合気体の場合、 α 粒子の速度分布の確率関数を $g_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $\mathbf{g} = (g_\alpha, g_\beta, \dots)$ とすると、この mechanical system が

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = L_\alpha^* \equiv -\frac{\partial \mathbf{v} g_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + L_\alpha, \quad L_\alpha \equiv -\frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha g_\alpha). \quad (38)$$

によって定まる場合を考える。但し上式で

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha &= \mathbf{F}_\alpha^{(0)} + \mathbf{F}_\alpha^{(v)} + \mathbf{F}_\alpha^{(c)}, \quad \mathbf{F}_\alpha^{(0)} \equiv \text{system 外からの力} \\ \mathbf{F}_\alpha^{(v)} &\equiv \sum_\beta n_{\beta 0} \int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g_\beta(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \\ \mathbf{F}_\alpha^{(c)} g_\alpha &\equiv \sum_\beta n_{\beta 0} \int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \{g_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - g_\alpha(\mathbf{x}) g_\beta(\mathbf{x}')\} d\mathbf{x}' \\ \int g_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 1, \quad g_{\alpha\beta}^{(2)} = (1 + p_{\alpha\beta}) g_\alpha(\mathbf{x}) g_\beta(\mathbf{x}') \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

であり $g_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ は 2 体分布関数、 $n_{\beta 0}$ は β 粒子の平均数密度である。 \mathbf{F}_α については更に次の関係が一般に成立する。

$$\frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(v)}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(c)}}{\partial \mathbf{v}} \neq 0 \quad (40)$$

種々の \mathbf{g}_0 を含めた ensemble を考え、phase space の一点 \mathbf{x} に於ける \mathbf{g} の値が \mathbf{k} である distribution function を次のようにとる。

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \equiv \int \delta(\mathbf{k} - \mathbf{g}) P(\mathbf{g}, t) d\Omega, \quad \delta(\mathbf{k} - \mathbf{g}) \equiv \prod_\beta \delta(k_\beta - g_\beta) \quad (41)$$

只一種の気体に着目すれば

$$f_\alpha(\mathbf{x}, k_\alpha, t) \equiv \int \delta(k_\alpha - g_\alpha) P d\Omega \quad (42)$$

二種の気体に着目すると

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, k_\alpha, k_\beta, t) \equiv \int \delta(k_\alpha - g_\alpha) \delta(k_\beta - g_\beta) P d\Omega \quad (43)$$

とおく。また 2-point distribution function は

$$f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{x}', \mathbf{k}', t) \equiv \int \delta(\mathbf{k} - \mathbf{g}) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{g}') P d\Omega \quad (44)$$

着目気体の種類が α, β 等に限定したとき

$$\frac{f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, \mathbf{x}', k'_\beta, t) = \int \delta(k_\alpha - g_\alpha) \delta(k'_\beta - g'_\beta) P d\Omega}{f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, \mathbf{x}', k'_\alpha, k'_\beta, t) = \int \delta(k_\alpha - g_\alpha) \delta(k'_\alpha - g'_\alpha) \delta(k'_\beta - g'_\beta) P d\Omega} \quad (45)$$

とおく。また

$$\left. \begin{aligned} \lim_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \rightarrow \infty} f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{x}', \mathbf{k}', t) &= f(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) f(\mathbf{x}', \mathbf{k}', t) \\ \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{x}', \mathbf{k}', t) &= f(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \\ \therefore \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} f_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, \mathbf{x}', k'_\alpha, t) &= f_\alpha(\mathbf{x}, k_\alpha, t) \delta(k'_\alpha - k_\alpha) \\ \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, \mathbf{x}', k'_\beta, t) &= f_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, k_\alpha, k'_\beta, t) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

等が成立する。 f の方程式は次のようになる

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v} f}{\partial \mathbf{r}} + \sum_\alpha \int \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha^{(o)} + \mathbf{F}_\alpha^{(v)}, \frac{\partial g_\alpha}{\partial \mathbf{v}}) \frac{\partial \delta(\mathbf{k} - \mathbf{g})}{\partial g_\alpha} P d\Omega \\ - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \int \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(c)} g_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{g}) P d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

$$\bar{g}_\beta(\mathbf{x}, t) \equiv \int k_\beta f(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = \int k_\beta f_\beta(\mathbf{x}, k_\beta, t) dk_\beta = \int g_\beta P d\Omega \quad (48)$$

が成立するが，更に

$$\bar{\mathbf{F}}_\alpha^{(v)} \equiv \sum_\beta n_{\beta 0} \int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') k'_\beta f_\beta(\mathbf{x}', k'_\beta, t) dk'_\beta d\mathbf{x}' = \sum_\beta n_{\beta 0} \int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \bar{g}_\beta(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha^{(v, c)} f_\alpha &\equiv \sum_\beta n_{\beta 0} \int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \{ f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, \mathbf{x}', k'_\beta, t) \\ &\quad - f_\alpha(\mathbf{x}, k_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{x}', k'_\beta, t) \} k'_\beta dk'_\beta d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (50)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F}_\alpha^{(v)} \delta(k_\alpha - g_\alpha) P d\Omega &= \bar{\mathbf{F}}_\alpha^{(v)} f_\alpha + \sum_\beta n_{\beta 0} \int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') (g_\beta - \bar{g}_\beta)_{\mathbf{x}'} \delta(k_\alpha - g_\alpha) P d\Omega \\ &= \bar{\mathbf{F}}_\alpha^{(v)} f_\alpha + \mathbf{F}_\alpha^{(vc)} f_\alpha \end{aligned}$$

となり， f_α の式は次のようになる

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v} f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{F}_\alpha^{(o)} + \bar{\mathbf{F}}_\alpha^{(v)}) f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(vc)} f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \\ - \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \int \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(c)} g_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \delta(k_\alpha - g_\alpha) P d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

k_α についての moment eq. を求めると g_α の式が得られ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{g}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v} g_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{F}_\alpha^{(o)} + \mathbf{F}_\alpha^{(v)}) \bar{g}_\alpha \\ + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(v)} g_\alpha}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(c)} g_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

$$\mathbf{F}_\alpha^{(c)} g_\alpha \equiv \int \mathbf{F}_\alpha^{(c)} k_\alpha f_\alpha dk_\alpha = \int \mathbf{F}_\alpha^{(c)} g_\alpha P d\Omega,$$

$$\mathbf{F}_\alpha^{(vc)} g_\alpha \equiv \int \mathbf{F}_\alpha^{(vc)} k_\alpha f_\alpha dk_\alpha = \sum_\beta n_{\beta o} \int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \{ g_\alpha(\mathbf{x}) g_\beta(\mathbf{x}') - \overline{g_\alpha(\mathbf{x}) g_\beta(\mathbf{x}')} \} d\mathbf{x}'.$$

となる。 $f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, \mathbf{x}', k'_\beta, t)$ の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha\beta}^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{v} f_{\alpha\beta}^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} (\mathbf{v}' f_{\alpha\beta}^{(2)}) + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{F}_\alpha^{(o)} + \mathbf{F}_\alpha^{(v)}) f_{\alpha\beta}^{(2)} \\ + \frac{1}{m_\beta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} (\mathbf{F}_\beta^{(o)} + \mathbf{F}_\beta^{(v)}) f_{\alpha\beta}^{(2)} + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{F}_\beta^{(vc2)} f_{\alpha\beta}^{(2)}) + \frac{1}{m_\beta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} (\mathbf{F}_\alpha^{(vc2)} f_{\alpha\beta}^{(2)}) \\ - \int \left\{ \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(c)} g_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \kappa_\alpha} + \frac{1}{m_\beta} \frac{\partial \mathbf{F}_\beta^{(c)} g'_\beta}{\partial \mathbf{v}'} \frac{\partial}{\partial \kappa'_\beta} \right\} \delta(\kappa_\alpha - g_\alpha) \delta(\kappa'_\beta - g'_\beta) P d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha^{(vc2)} f_{\alpha\beta}^{(2)} \equiv \sum_\beta n_{\beta o} \int \mathbf{F}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \{ f_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(\mathbf{x}, \kappa_\alpha, \mathbf{x}', \kappa'_\beta, \mathbf{x}'', \kappa''_\gamma, t) \\ - f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \kappa_\alpha, \mathbf{x}', \kappa'_\beta, t) f_\gamma(\mathbf{x}'', \kappa''_\gamma, t) \} \kappa''_\gamma d\kappa''_\gamma d\mathbf{x}'' \end{aligned}$$

$\mathbf{F}_\alpha^{(c)}$ は Boltzman 型の衝突項と, Fokker-Planck 型の項との和の形で示し得, これを入れ

て具体化して解くを要するが, 今の所求まっている。

§ 7. H-theorem.

system 全体を粒子の集団と見る立場に立って ensemble を考え, 粒子が \mathbf{x} の所の Volume element $d\mathbf{x}$ にある確率が α 粒子について $(\int f_\alpha \kappa_\alpha d\kappa_\alpha) d\mathbf{x}$ である故, H-function としては次のものにとるべきである。

$$\begin{aligned} H &= \sum_\alpha \iiint f_\alpha \kappa_\alpha \log f_\alpha \kappa_\alpha d\mathbf{k} d\mathbf{x} \\ &= \sum_\alpha \iiint f_\alpha \kappa_\alpha \log \kappa_\alpha d\mathbf{k} d\mathbf{x} + \sum_\alpha \iiint f_\alpha \kappa_\alpha \log f_\alpha d\mathbf{k} d\mathbf{x} \\ &= \sum_\alpha \iiint g_\alpha \log g_\alpha P d\Omega d\mathbf{x} + \sum_\alpha \iiint f_\alpha \kappa_\alpha \log f_\alpha d\mathbf{k} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{\partial H}{\partial t} &= \sum_{\alpha} \iint \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t} (1 + \log g_{\alpha}) P d\Omega d\mathbf{x} + \sum_{\alpha} \iint \frac{\partial f_{\alpha} \kappa_{\alpha}}{\partial t} (1 + \log f_{\alpha}) d\mathbf{k} d\mathbf{x} \\
&= - \sum_{\alpha} \frac{1}{m_{\alpha}} \iint \frac{\partial \mathbf{F}_{\alpha}^{(c)} g_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} (1 + \log g_{\alpha}) P d\Omega d\mathbf{x} \\
&\quad - \sum_{\alpha} \frac{1}{m_{\alpha}} \iint \frac{\partial \mathbf{F}_{\alpha}^{(c)} g_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \kappa_{\alpha} \log f_{\alpha}}{\partial \kappa_{\alpha}} \delta(\kappa_{\alpha} - g_{\alpha}) P d\Omega d\kappa_{\alpha} d\mathbf{x} \\
&\quad - \sum_{\alpha} \frac{1}{m_{\alpha}} \iiint \frac{\partial \mathbf{F}_{\alpha}^{(vc)} f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \kappa_{\alpha} (1 + \log f_{\alpha}) P d\Omega d\kappa_{\alpha} d\mathbf{x} \tag{55}
\end{aligned}$$

となる。第一行は g_{α} なる状態の普通の気体論での $\partial H / \partial t$ の平均値になっており，第二行は，粒子の衝突と collective な変動との相互干渉の項であり，第三項は collective な相互作用によるもので，いずれも 2-point distribution function $f_{\alpha\beta}^{(2)}$ が本質的な役割を為している。特に第三項は $\mathbf{F}_{\alpha}^{(vc)}$ が $f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \kappa_{\alpha}, \mathbf{x}', \kappa'_{\beta}, t) - f_{\alpha}(\mathbf{x}, \kappa_{\alpha}, t) f_{\beta}(\mathbf{x}', \kappa'_{\beta}, t)$ の形が効いて来ており $\partial \mathbf{F}_{\alpha}^{(vc)} f_{\alpha} / \partial \mathbf{v} \neq 0$ のとき H の変動に寄与することになる。これらの項での負の判定は $f^{(2)}$ の函数形が求まらなないと出来ない。今の所これはまだ求まっていない。

文 献

- (1) E. Hopf, J. Rat. Mech. Anal. **1**, 87 (1952).
- (2) T. S. Lundgren, Phys. Fluids, **10**, 969 (1967).